Početní část 2 - 22.2.2021

3. Integrál rozdělíme na dvě části
$$I = \int (|x|+1)\sqrt{9+x^2}\,dx = \int |x|\sqrt{9+x^2}\,dx + \int \sqrt{9+x^2}\,dx = I_1 + I_2.$$
Pro výpočet I_1 využijeme substituci $t = x^2+1$, $dt = 2x\,dx$ pro $x>0$ máme
$$I_1 = \int x\sqrt{9+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{9+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\;dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(9+x^2)^{\frac{3}{2}}$$
a pro $x<0$ máme analogicky
$$I_1 = -\int x\sqrt{9+x^2}\,dx \stackrel{c}{=} -\frac{1}{3}(9+x^2)^{\frac{3}{2}}.$$
Celově tedy
$$I_1 = -\int x\sqrt{9+x^2}\,dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{3}\operatorname{sgn}(x)(9+x^2)^{\frac{3}{2}} = F(x).$$
Protože $\lim\limits_{x\to 0\pm} F(x) = \pm 9$ dostáváme podle věty o lepení, že pro
$$G(x) = \begin{cases} F(x)-9, & x>0, \\ F(x)+9, & x<0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$
platí
$$I_1 \stackrel{c}{=} G(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$
Pro výpočet I_2 použijeme substituci $x = 3\sinh t$, $dx = 3\cosh t\;dt$. Máme
$$I_2 = \int \sqrt{9+x^2}\,dx = \int 3\cosh t\sqrt{9+9\sinh^2 t}\,dt = 9\int \cosh^2 t\;dt = 9J.$$
Pomocí per partes dostáváme
$$J = \sinh t\cosh t - \int \sinh^2 t\;dt = \sinh t\cosh t - \int \cosh^2 t - 1\;dt = \sinh t\cosh t + t - J.$$
Tedy
$$J \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\left(\sinh t\cosh t + t\right)$$
a ($t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{3}$)
$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{9}{2}\left(\sinh t\cosh t + t\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\cosh(\operatorname{argsinh}\frac{x}{3}) + \operatorname{argsinh}\frac{x}{3}\right) = H(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$
Celkově
$$I \stackrel{c}{=} G(x) + H(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

4. (a) Platí (pro $x \in (-1,1)$, resp. $x \in \mathbb{R}$)

$$(\operatorname{argtanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\operatorname{argtanh} x)'' = \frac{2x}{(x^2-1)^2}, \quad (\operatorname{argtanh} x)''' = -\frac{2\,(3x^2+1)}{(x^2-1)^3},$$

a

$$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad (\operatorname{argsinh} x)'' = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}, \quad (\operatorname{argsinh} x)''' = \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}.$$

Po dosazení $x = 0$ dostáváme (z definice Taylorova polynomu)

$$\begin{aligned} \operatorname{argtanh} x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0, \\ \operatorname{argsinh} x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

(b) Připomeneme si, že

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

(c) Potom snadno dopočítáme (vše $x \to 0$)

$$\begin{aligned} \log(1 + \operatorname{argtanh} x) &= x + \frac{x^3}{3} - \frac{(x + \frac{x^3}{3})^2}{2} + \frac{(x + \frac{x^3}{3})^3}{3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \log(1 + \operatorname{argsinh} x) &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{2} + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^3}{3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

(d) Pomocí výše spočtených Taylorových polynomů už pak snadno spočteme

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \operatorname{argtanh} x) - \log(1 + \operatorname{argsinh} x)}{x^3} \\ &\quad = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}) + o(x^3)}{x^3} \\ &\quad = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$